

$$V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Def: un prodotto scalare : $V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 è detto definito positivo se

$$\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{R}) : \bar{x} \cdot \bar{x} > 0 \quad (\text{positivo})$$

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}.$$

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

oss: In $\mathbb{R}^n$ il prod. scalare standard.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

è definito positivo, infatti

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (x_1 \dots x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \quad \text{ed è } 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{R}) \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

(c/s) $\Rightarrow$ TRIANGOLARE

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \\ &= \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} = \\ &= \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \|\bar{y}\|^2 \leq \\ &\leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 \leq \quad (cs) \\ &\leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ESTRAENDO } \sqrt{\quad} \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

□

DM (5/5)

$$\text{Se } \bar{y} = \vec{0} \Rightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x} \cdot \vec{0}| = 0 \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\vec{0}\| = \|\bar{x}\| \cdot 0 = 0$$

Supponiamo $\bar{y} \neq \vec{0}$ e consideriamo il

vettore $\bar{x} + \alpha \bar{y}$

$$(\bar{x} + \alpha \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \alpha \bar{y}) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{perché - è def. positiva.}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{x} + 2\alpha \bar{y} \cdot \bar{x} + \alpha^2 \bar{y} \cdot \bar{y} \geq 0 \quad \forall \alpha$$

$$\|\bar{x}\|^2 + 2\alpha \bar{x} \cdot \bar{y} + \alpha^2 \|\bar{y}\|^2 \geq 0 \quad \forall \alpha$$

$$\Downarrow \quad \Delta \leq 0 \Rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \leq 0$$
$$(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \Rightarrow$$

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|, \quad \square$$



Sp. vettoriali
con prod. scalare
euclideo

Spazi normati $\subseteq$

Spazi metrici.

[Sp. di Hilbert]

[Sp. di Banach]

prodotto
scalare
definito
positivo

norma
(euclidea)

distanza

$$\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$$

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

o: bilineare

simmetrica

$$\bullet: V_n(\mathbb{R}), V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|\bar{x}\|: V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\|\bar{x}\| \geq 0$$

$$\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

$$\|a\bar{x}\| = |a| \cdot \|\bar{x}\|$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

$$d: V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}).$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

è una distanza

PROIEZIONI DI
VETTORI/ANGOLI
FRA VETTORI

LUNGHEZZA

DISTANZA

oss: $\mathbb{R}^n$ la funzione

$$\|\bar{x}\|_p := \begin{cases} (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{se } p > 0 \text{ e } p \neq \infty \\ \sup |x_i| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è una norma $\forall p \in [0, +\infty]$

$$\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$$

in particolare se $\alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \|\alpha \bar{x}\| = \|\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x}\|$
 $\parallel$
 $\alpha \|\bar{x}\|$



$\alpha \in \mathbb{N}_0$
 $\alpha \neq 0$

$\bar{y} = \frac{1}{\alpha} \bar{x}$ è il vettore $\bar{y}$ tale che

$$\underbrace{\bar{y} + \dots + \bar{y}}_{\alpha \text{ volte}} = \bar{x} \Rightarrow \alpha \|\bar{y}\| = \|\bar{x}\|$$

$\frac{a}{b} \bar{x}$ è il vettore

che nominato a se stesso
b volte ci dà il vettore $a\bar{x}$.

$a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0, a \neq 0$

$$\sqrt{b} \sqrt{|\bar{x}|} = \sqrt{b} \sqrt{|\bar{x}|}$$

$$\|\bar{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

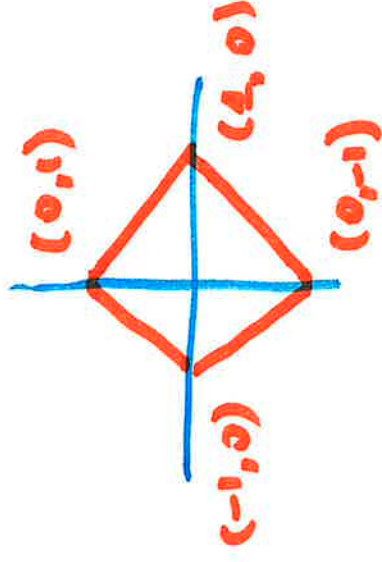
$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup |x_i|.$$

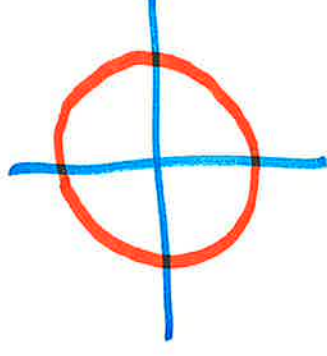
In $\mathbb{R}^2$

$$\bar{x} = (x, y).$$

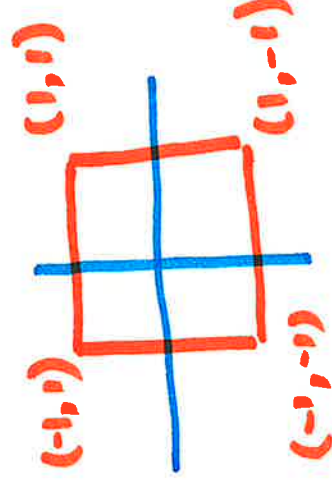
$$\{\bar{x} \mid \|\bar{x}\|_1 = 1\} = \{\bar{x} \mid |x| + |y| = 1\}.$$

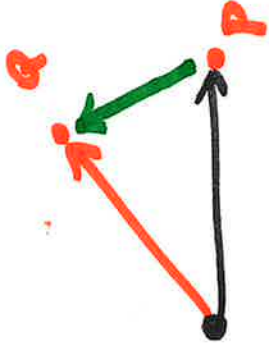
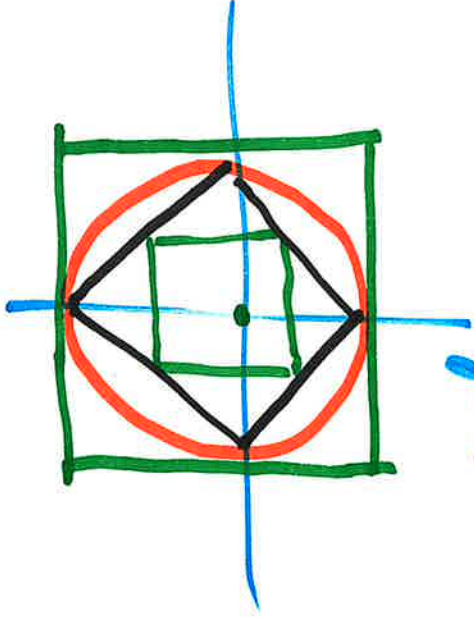


$$\{\bar{x} \mid \|\bar{x}\|_2 = 1\} = \{\bar{x} \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$



$$\{\bar{x} \mid \|\bar{x}\|_\infty = 1\} = \{\bar{x} \mid \max(|x|, |y|) = 1\}$$





Ogni norma definisce una distanza

$$d(P, Q) := \|P - Q\| = \|Q - P\| = d(Q, P)$$

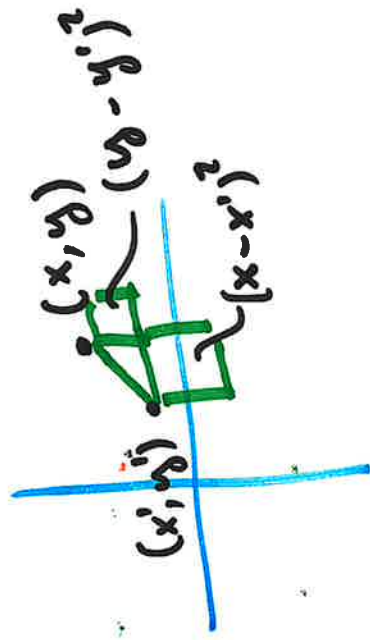
$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \|P - R + R - Q\| \leq$$

$$\leq \|P - R\| + \|R - Q\| = d(P, R) + d(R, Q)$$

In $\mathbb{R}^2$ con prod. scal. std.

$(x, y), (x', y')$

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$



ci possono essere distanze non definite da norme.

in $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|.$$

distanza di Hamming.

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = y_i \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x}) \geq 0 \text{ ovvio.}$$

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_H(\bar{x}, \bar{z}) + d_H(\bar{z}, \bar{y})$$

$$|\{i \mid x_i \neq y_i\}| = |\{i \mid x_i \neq y_i \text{ e } x_i = z_i\}| + |\{i \mid z_i = x_i \text{ e } y_i \neq x_i\}| \geq |\{i \mid z_i \neq x_i \text{ e } x_i \neq y_i\}| \geq$$

$$\leq d(\bar{y}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{x})$$

□

DISTANZA
DI HAMMING.

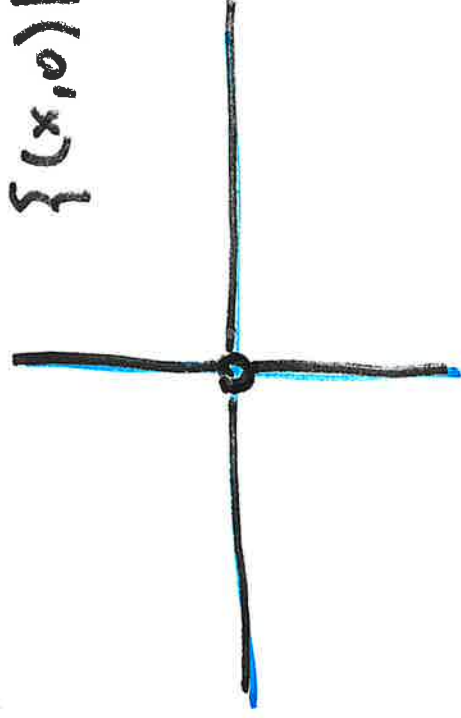
$$\{i \mid x_i \neq y_i \text{ e } x_i = z_i\} \subseteq \{i \mid z_i \neq y_i\}$$

$$\{i \mid x_i \neq y_i, x_i \neq z_i\} \subseteq \{i \mid x_i \neq z_i\}$$

In $\mathbb{R}^2$ come è fatto il

luogo dei vettori a $d_H = 1$ da $(0,0)$?

$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$



Def. $V_n(\mathbb{R})$ è detto spazio vettoriale Euclideo se
 è definito su $V_n(\mathbb{R})$ un prod. scalare definito
 positivo $\Rightarrow$ ABBIAMO ANCHE LA NORMA EUCLIDEA $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$
 LA DISTANZA EUCLIDEA $d(x, y) = \|x - y\|$

Indicheremo gli spazi euclidei con il simbolo

$$V_n(\mathbb{R}).$$

oss: In uno spazio euclideo, data una base B ,
 il procedimento di Gram/Schmidt fornisce sempre
 una base ortonormale B' .

$\rightarrow$ OGNI VETTORE $\neq 0$ è isosotopo (cioè di norma non 0).

$\rightarrow$ si può ortogonalizzare qualsiasi base.

$\rightarrow$ ~~base~~ vettori $\neq 0$ sono tutti > 0 e dunque quadrati in $\mathbb{R}$
 E.S. di $\Rightarrow$ si può normalizzare!

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_i' := \bar{e}_i - \sum_{j=1}^i \frac{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_i}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j} \bar{e}_j$$

$$B = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$$

$$\downarrow$$

$$B' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$$

$$\bar{e}_i'' := \frac{1}{\|\bar{e}_i'\|} \bar{e}_i' = \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}} \bar{e}_i'$$

$$\downarrow$$

$$B'' = (\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$$

oss: Il prod. scalare di $V_n(\mathbb{R})$ rispetto una base ortonormale B'' è rappresentato dalla matrice I .

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} +1 & i=j \\ +0 & i \neq j \end{cases}$$

In particolare se $\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i''$ $\bar{y} = \sum_j y_j \bar{e}_j'' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Come sono fatte le matrici di cambiamento di base rispetto basi ortonormali?

il prod. scalare si scrive rispetto a B ortogonale

come ${}^T X B Y$ con $B = I$

similmente si scrive ${}^T X' B' y' = \text{con } B' = I$
rispetto all'altro base B' ortogonale.

più adorno A una matrice di cambiamento di base

tale che $X' = A X \quad y' = A y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^T X I y &= ({}^T X') I (y') = \\ &= X'^T A A y \Rightarrow {}^T A A = I \end{aligned}$$

cioè ${}^T A = A^{-1}$

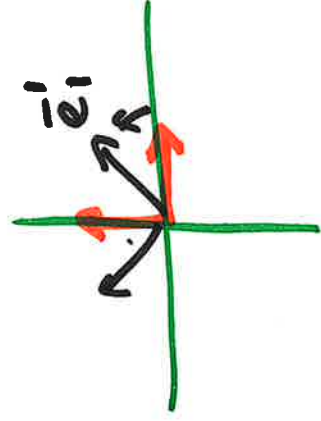
Def: una matrice A è detta ortogonale $\Leftrightarrow {}^T A = A^{-1}$

Δ Le righe/colonne di una matrice A ortogonale
 sono un sistema ortonormale di vettori
 cioè $\forall i=1 \dots n, \quad {}^t C_i C_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i=j \end{cases}$

e similmente le righe.

$[A \text{ ortogonale}] \Leftrightarrow {}^t A = A^{-1} \Leftrightarrow {}^t (A^{-1}) = A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow {}^t A \text{ ortogonale} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ ortogonale}]$

In $\mathbb{R}^2$



$$\bar{e}_1 = (1, 0)$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1)$$

$$\bar{e}'_1 = (\cos v, \sin v)$$

$$\bar{e}'_2 = (-\sin v, \cos v)$$

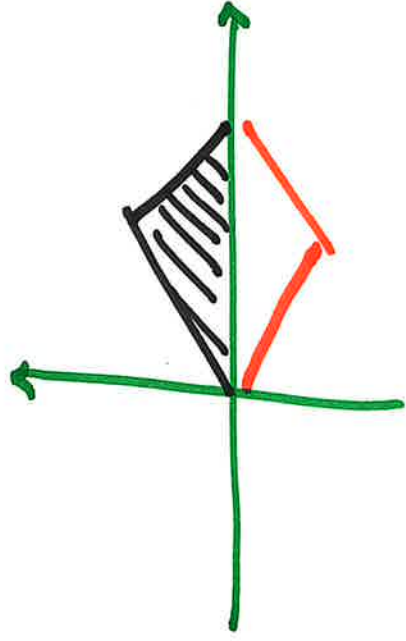
$$A = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$${}^tAA = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oss: Se ${}^tA = A^{-1} \Rightarrow 1 = \det({}^tAA) = \det(A) \cdot \det(A)$
 $\Rightarrow \det A = \pm 1$

→ In generale le matrici ortogonali sono un sottogruppo del gruppo delle matrici invertibili $O_n(\mathbb{R})$

→ Le matrici ortogonali di $\det = 1$ sono un sottogruppo di $O_n(\mathbb{R})$ detto $SO_n(\mathbb{R})$ gruppo speciale ortogonale.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

ma non

$$SO_2(\mathbb{R}).$$

$SO_2(\mathbb{R})$ corrisponde alle rotazioni di centro l'origine.

prodotto scalare: $\bar{x} \perp \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

prodotto scalare è definito positivo pongo

" ϑ ANGOLO FRA $\bar{x}$ e $\bar{y}$ "

$$\cos \vartheta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

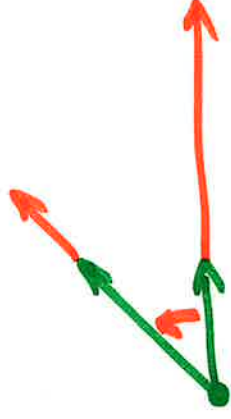
per C/S

$$-1 \leq \cos \vartheta \leq 1$$

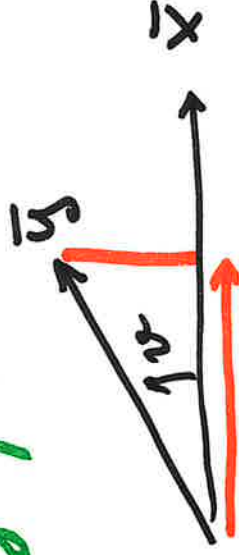
supponiamo $\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\| = 1$

N.B. $\cos \vartheta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} = \frac{(\alpha \bar{x}) \cdot (\beta \bar{y})}{\|\alpha \bar{x}\| \|\beta \bar{y}\|}$ $\alpha, \beta > 0$

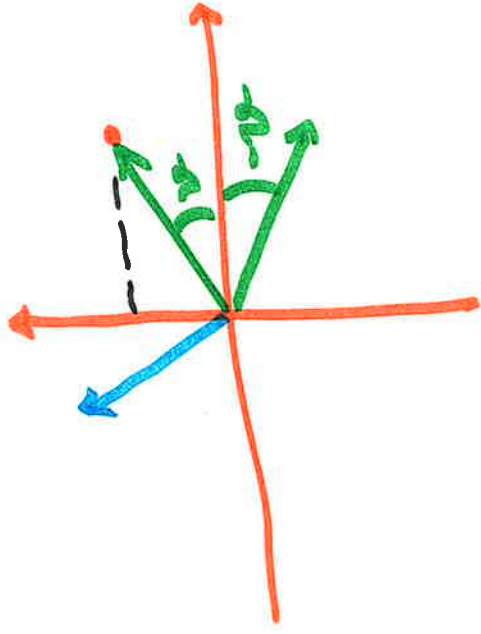
$\cos \vartheta$ NON DIPENDE DA $\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\|$
 MA SOLAMENTE DALLA LORO DIREZIONE
 E VERSO.



che cos è $\bar{x} \cdot \bar{y}$ quando $\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\| = 1$ $\rightarrow$ lunghezza
 proiezione di $\bar{y}$ su $\bar{x}$



$\bar{x} \cdot \left(\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \right) = \bar{x} (\bar{x} \cdot \bar{y})$



$$(10)^T = 2(102)$$

$$\sin \vartheta = \frac{\bar{x}^T \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

con $\bar{x}^T \in \{\bar{x}^T\}^T$

$$(0, 1)$$

$$(7, 10)$$

$$(0, -1)$$

Qual è il segno di $\sin \vartheta$?

Dico che due basi di $V_n(\mathbb{R})$ hanno le
stesse

stesse orientazione $\Leftrightarrow$ la matrice di cambiamento di
base che le lega ha $\det = +1$

In $\mathbb{R}^n$ diciamo che una base è orientata
come quella canonica se la sua matrice risp.
ha $\det \neq 0$.

Definiamo sin v in $\mathbb{R}^2$ come l'orientazione
del valore di $\frac{\tilde{x} \cdot \tilde{y}}{\|\tilde{x}\| \|\tilde{y}\|}$ ove $\tilde{x}$ è vettore

ortogonale ad $\tilde{x}$ e vale che la base

$$\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}, \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} \right) \text{ abbia la stessa}$$

orientazione di $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

